

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Агафонов Александр Викторович  
Должность: директор филиала  
Дата подписания: 17.06.2022 10:45:13  
Уникальный программный ключ:  
2539477a8ecf706dcb7b0c419631b11

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

**Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем  
управления**

УТВЕРЖДАЮ  
Директор филиала  
А.В. Агафонов  
« 26 » мая 2022г.



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ  
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ**

**«Математические основы ТОЭ»**  
(наименование дисциплины)

Направление подготовки	<b>13.03.02 «<u>Электроэнергетика и электротехника</u>»</b> (код и наименование направления подготовки)
Направленность подготовки	<b>«<u>Электроснабжение</u>»</b> (наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	<b>Бакалавр</b>
Форма обучения	<b>очная и заочная</b>

Чебоксары, 2022

Методические указания разработаны  
в соответствии с требованиями ФГОС ВО

по направлению подготовки

13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

Автор Кульпина Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

*(указать ФИО, ученую степень, ученое звание или должность)*

Методические рекомендации одобрены на заседании кафедры Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления (протокол № 10 от 14.05.2022 г.).

**1. Цель расчетно-графической работы** - выявить знания студентов методологических основ ТОЭ, умение применять эти знания в анализе явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов ТОЭ.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь вычислять пределы, находить производные, находить интегралы.

Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

**Выполнение расчетно-графической работы** включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Математические основы ТОЭ», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к зачету не допускаются.

**2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы**

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

**Титульный лист** является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

**Во введении** содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

**В расчетной части** обучающийся должен показать умение применять математические методы ТОЭ расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты – до 0,001, а проценты – до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

**В заключении** расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

### **3. Требования к оформлению расчетно-графической работы**

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы – 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта – 14 пунктов, интервал – 1,5).

2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.

3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.

4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.

5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные подписи.

6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

#### 4. Теоретический материал и примеры решения задач

##### Матрицы и операции над ними

*Сложение (вычитание) матриц* одинакового размера производится поэлементно.

$$C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

*Умножение матрицы на число* – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A = \lambda B, a_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

*Умножение матрицы на матрицу* определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы  $A_{m \times n}$  на  $B_{n \times p}$  называется матрица  $C_{m \times p}$ , элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием*. Транспонированная по отношению к матрице  $A$  матрица обозначается  $A^t$ .

*Пример.* Найти матрицу  $C = 2A + B^t$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*  $C = 2A + B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$

*Пример.* Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -3 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

## Определители

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое *определителем*.

*Определитель* матрицы *второго порядка* вычисляется по формуле

$$|A| = \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

*Определитель* матрицы *третьего порядка* вычисляется по *правилу треугольников* или *Саррюса*

$$|A| = \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определитель матрицы второго порядка вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

*Теорема Лапласа.* Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

*Пример.* Вычислить определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ : а) по

правилу треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

*Решение.*

А)

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \cdot 4 = \\ = 12 - 6 - 10 + 2 + 30 - 12 = 16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 5 - (-1) \cdot (-3)) = -12,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 0.$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-12) + 4 \cdot 0 = 16.$$

## Ранг матрицы

### Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

*Обратной матрицей*  $A^{-1}$  для матрицы  $A$  называется матрица, для которой справедливо равенство  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ , где  $E$  - единичная матрица.

Обратная матрица  $A^{-1}$  определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

*Теорема о ранге матрицы.* Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

*Пример.* Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

*1 способ.* Находим определитель матрицы  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ . Значит

матрица имеет обратную.

$$(A|E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & -7 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 16 & 28 & -24 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$



использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей.

Для решения *методом Гаусса* составляют расширенную матрицу системы, которую затем с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных.

Решение системы *матричным методом* или *методом обратной матрицы* определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

По формулам Крамера :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где  $\Delta$  - определитель системы,  $\Delta_j$  - определители, полученные из определителя системы заменой  $j$ -го столбца на столбец свободных членов.

*Пример.* Решить СЛАУ: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

*Решение.* А) Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов}.$$

Определитель системы  $\Delta = -7 \neq 0$ . Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ .

Б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

В) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на 3.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array} \right)$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -3x_2 - x_3 = -4, \\ 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем  $x_3 = \frac{7}{7} = 1$ , из второго уравнения  $x_2 = \frac{4 - x_3}{-3} = \frac{4 - 1}{-3} = 1$ , и из первого  $x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1$ .

## Векторная алгебра

### Операции над векторами

#### Скалярное произведение векторов

*Вектором* называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  называются *линейно-независимыми*, если  $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . В противном случае, они линейно-зависимы.

*Длиной (модулем) вектора* называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина  $\vec{a}(x, y)$  определяется по формуле  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Векторы называются *коллинеарными*, если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

1) сложение:  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ;

2) умножение на число  $\lambda \vec{a} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ .

Углы наклона  $\vec{a}$  к осям координат называются *направляющими косинусами*.

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

*Проекцией вектора  $\vec{a}$  на ось  $l$  называется число*

$$i\partial_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  - угол наклона вектора  $\vec{a}$  к оси  $l$ .

*Скалярным произведением  $\vec{a}, \vec{b}$  называется число*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

В координатной форме

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

*Угол между векторами  $\vec{a}, \vec{b}$  определяется по формуле*

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

*Пример.* Найти длину  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  и разложить его по  $\vec{a}, \vec{b}$ , если

$$\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (1, -2), \vec{c} = (-1, 1).$$

*Решение.* Найдем координаты  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3, -1) + (1, -2) + (-1, 1) = (3, -2)$ .

Длина вектора  $\vec{d} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ .

Разложить по  $\vec{a}, \vec{b}$  - значит, представить в виде  $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ . Для определения  $\alpha, \beta$ , запишем в виде

$$\alpha \cdot (3, -1) + \beta \cdot (1, -2) = (3, -2)$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = -2. \end{cases}$$

Решив систему, получим  $\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{3}{5}$ , то есть  $\vec{d} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ .

*Пример.* Найти угол между векторами  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \cos \varphi &= \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2}} = \\ &= \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{13}}. \end{aligned}$$

## Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением  $\vec{a}, \vec{b}$  называется число

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$

В координатной форме

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , равен модулю их смешанного произведения.

*Пример.* Найти вектор  $\vec{d}$ , ортогональный  $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-7, 0, 2)$ , для которого скалярное произведение с  $\vec{c} = (1, 1, 1)$  равно 3.

*Решение.* Искомый вектор коллинеарен  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Следовательно, он равен  $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ .

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, -23, 14).$$

Тогда  $\vec{d} = (4\lambda, -23\lambda, 14\lambda)$ .

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = 4\lambda \cdot 1 - 23\lambda \cdot 1 + 14\lambda \cdot 1 = -5\lambda = 3, \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \vec{d} = \left(-\frac{12}{5}, \frac{69}{5}, -\frac{42}{5}\right).$$

## 5. Задания расчётно-графической работы.

**Задание 1.** Даны матрицы  $A$  и  $B$ . Найдите матрицу  $C$ .

1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = 2A + 3B.$

$$2. A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, C = 3B - 2A.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, C = 3A - B.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 7 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = A + 2B.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, C = 2B - A^t.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = (2A)^t + B.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = A + 2B^t.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = 2A^t - B^t.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 17 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 18 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = (12A)^t - B.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 6 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = A + 15B$$

**Задание 2.** Найдите произведение матриц  $A \cdot B$  или значение матричного многочлена. Существует ли произведение  $B \cdot A$ ?

$$1. A = (1 \quad -1 \quad 2), B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = (1 \quad 2 \quad 3), B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = (-4 \quad 34 \quad 3), B = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. f(x) = 2x^2 - 5x + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7. f(x) = 3x^2 + 2x - 5,$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$8. f(x) = x^3 - 7x^2 + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. f(x) = 12x^2 + 5x + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 37 & -11 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задание 3.** Вычислить определитель.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$10. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Задание4.** Найдите обратную матрицу для матрицы  $A$ . Сделайте проверку.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 20 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 19 \end{pmatrix}.$$

**Задание 5.** Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 3y + 4z = 3, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 2y + 3z = 12, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x - y + z = -17, \\ x - 3y + 2z = -11, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x - y - z = -3, \\ x + 3y + 3z = -4, \\ -x + 2y - z = 5. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x - y + z = -16, \\ 2x - 3y + 2z = -11, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - y - z = -3, \\ x + 2y + 3z = -4, \\ -x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + y + z = -1, \\ 6x - y + 2z = -4, \\ 2x + y + 4z = -1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y + 4z = 1, \\ 2x + y - z = 1, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

**Задание 6.** Найти линейную комбинацию векторов.

1.  $3\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (4, 1, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ ,  $\vec{c} = (10, 8, 1)$ .

2.  $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ , где  $\vec{a} = (1, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (-1, 1, -2)$ .

3.  $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 3(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$ , где  $\vec{a} = (4, 1, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ ,  $\vec{c} = (10, 8, 1)$ .

4.  $4\vec{a} + 19\vec{b} - \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (2, -4, 3)$ ,  $\vec{b} = (10, -5, -2)$ ,  $\vec{c} = (187, 8, 1)$ .

5.  $18\vec{a} + 3\vec{b} + 7\vec{c}$ , где  $\vec{a} = (-6, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (54, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (-90, 1, -2)$ .

6.  $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 13(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$ , где  $\vec{a} = (45, -9, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ ,  $\vec{c} = (131, 9, 1)$ .

7.  $13\vec{a} + 6\vec{b} - \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (-10, 1, 9)$ ,  $\vec{b} = (1, 7, -2)$ ,  $\vec{c} = (10, 5, 1)$ .

8.  $-5\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}$ , где  $\vec{a} = (-7, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (-5, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (-1, 1, -2)$ .

9.  $2(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 7(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$ , где  $\vec{a} = (4, -8, 3)$ ,  $\vec{b} = (90, 2, -2)$ ,  $\vec{c} = (10, 8, 1)$ .

10.  $14\vec{a} + 19\vec{b} - \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (-4, -4, 3)$ ,  $\vec{b} = (113, -5, -2)$ ,  $\vec{c} = (17, 3, 1)$ .

**Задание 7.** Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1.  $\vec{a} = (0, 4, -3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 2)$ .

2.  $\vec{a} = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (0, -2, -3)$ .

3.  $\vec{a} = (4, 1, 3), \vec{b} = (1, 2, -2)$ .

4.  $\vec{a} = (1, 2, 0), \vec{b} = (2, 1, 1)$ .

5.  $\vec{a} = (4, 1, 3), \vec{b} = (1, 2, -2)$ .

6.  $\vec{a} = (1, 4, -7), \vec{b} = (-1, 2, 2)$ .

7.  $\vec{a} = (10, 1, -5), \vec{b} = (3, -2, -3)$ .

8.  $\vec{a} = (-14, 11, 3), \vec{b} = (3, 2, -2)$ .

9.  $\vec{a} = (13, 2, 0), \vec{b} = (24, 1, 1)$ .

10.  $\vec{a} = (51, 1, -3), \vec{b} = (1, 2, -2)$ .

### **Задание 8.**

1. Даны точки  $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2)$ . Найти модуль и направление вектора  $AB$

2. Найти  $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$ , если  $\vec{a} = (1.5, 0, -4), \vec{b} = (0, 0, 4)$ .

3. При каком значении  $n$  векторы  $\vec{a} = (3, -2, 1)$  и  $\vec{b} = (n, 4, 0.5)$  ортогональны?

4. Найти  $(\vec{c}, \vec{d})$ , если  $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}, \vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b}, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $120^\circ$ .

5. Вычислить  $|\vec{c}|$ , если  $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $60^\circ$ .

6. Вычислить  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , если  $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{b}| = 4$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $135^\circ$ .

7. Найти внешний угол  $B$  в треугольнике  $ABC$ , если  $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2), C(2, -3, 1)$ .

8. Найти угол между векторами  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $60^\circ$ .

9. Найти  $\vec{c} = 2\vec{a}, \vec{d} = \vec{b} - \vec{a}, |\vec{c}|, |\vec{d}|, \vec{d}^2, (\vec{c}, \vec{d})$ , угол между векторами  $\vec{c}, \vec{d}$ , если  $\vec{a} = (2, -1, -2), \vec{b} = (8, -4, 0)$ .

10. Построить параллелограмм на векторах  $OA = (1, 1, 0), OB = (0, -3, 1)$ .  
Определить диагонали и их длины.

### Задание 9.

1. Вычислить  $[\vec{c}, \vec{d}]$ , если

$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}, \vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = (-1, 0, 3), \vec{b} = (1, 1, 2).$$

2. Найти  $[[\vec{c}, \vec{d}]]$ , если  $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $30^\circ$ .

3. Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , если  $A(2, -2, 3), B(-3, -6, 0), C(4, -3, -1)$ .

4. Лежат ли точки  $A(2, -1, -3), B(-4, 1, -2), C(0, -6, 3), D(-12, -2, 5)$  в одной плоскости?

5. Лежат ли точки  $A(1, -2, 3), B(0, 1, 0), C(1, 2, -1), D(4, -1, 7)$  в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a} = (2, -2, 6), \vec{b} = (-6, 6, 3),$   
 $\vec{c} = (3, -2, 5)$ .

7. Найти объем тетраэдра  $ABCD$ , высоту  $BP$ , площади граней тетраэдра, если  $A(1, -3, -5), B(-1, 2, -4), C(0, 0, -2), D(-6, -1, -2)$ .

8. Найти объем тетраэдра  $ABCD$ , высоту  $BP$ , медианы граней, площади граней тетраэдра, если  $A(2, -1, 2)$ ,  $B(5, 5, 5)$ ,  $C(3, 2, 0)$ ,  $D(4, 1, 4)$ .

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ , длины диагоналей параллелограмма, угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{p}$ , и проекцию  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{c} = 6\vec{a} + 10\vec{b}$ ,  $\vec{d} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$ ,  $\vec{f} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $135^\circ$ .

### Задание 10.

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины  $A$ , и медианы, проведенной из вершины  $B$ , треугольника  $ABC$ , если  $A(-1, -5)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(1, -2)$ .

2. Написать уравнение стороны квадрата  $ABCD$ , если заданы координаты двух его смежных вершин  $A(1, -1)$ ,  $B(-3, 3)$ .

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку  $A(8, 6)$  и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки  $A(5, 4)$  до прямой, проходящей через точки  $B(1, -2)$ ,  $C(0, 3)$ .

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку  $A(1, 4)$ , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой  $-2x + 5y - 2 = 0$ .

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку  $A(-1, 5)$  и точку пересечения прямых  $5x + 3y - 1 = 0$  и  $4x + 5y + 7 = 0$ .

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1, 1, 2)$ , перпендикулярно вектору  $AB$ , если  $B(-1, 2, 3)$ .

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(-1, 2, -3)$  параллельно плоскости, заданной уравнением  $4x + y - 2z + 2 = 0$ .

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1, -1, 3)$  и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями  $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$  и  $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$ .

## 6. Шкала оценивания

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«Отлично»	обучающийся ясно изложил условия задач, решения обосновал
«Хорошо»	обучающийся ясно изложил условия задач, но в обосновании решений имеются сомнения;
«Удовлетворительно»	обучающийся изложил решение задач, но в решении есть ошибки;
«Неудовлетворительно»	обучающийся не уяснил условия задач, решения не обосновал, либо не сдал работу на проверку.

## 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

### Основная литература

1. Малинин, Л. И. Теория электрических цепей : учебное пособие для вузов / Л. И. Малинин, В. Ю. Нейман. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 345 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-04319-8. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/489941>
2. Теоретические основы электротехники : учебник / И. Я. Лизан, К. Н. Маренич, И. В. Ковалева [и др.]. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. – 627 с. : ил. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=618546>. – ISBN 978-5-9729-0663-5. – Текст : электронный.

### Дополнительная литература

1. Теоретические основы электротехники. Сборник задач : учебное пособие для вузов / Л. А. Бессонов [и др.] ; ответственный редактор Л. А. Бессонов. – 5-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 528 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-3486-1. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/467025> .

2. *Миленина, С. А.* Электротехника : учебник и практикум для вузов / С. А. Миленина, Н. К. Миленин ; под редакцией Н. К. Миленина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 263 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-05077-6. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/492090>.

#### Периодика

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки / гл. ред. Кривчик В.Д. — Пенза, 2021. — URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/314991>. — Текст : электронный

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

---

Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем  
управления

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТОЭ»

Выполнил: студент \_\_ курса  
заочного отделения  
по направлению 13.03.02  
Электроэнергетика и  
электротехника

\_\_\_\_\_

Ф.И.О.

Научный руководитель:

\_\_\_\_\_

должность, звание

\_\_\_\_\_

Ф.И.О.

Оценка \_\_\_\_\_

Дата «\_\_» \_\_\_\_\_ 2021г.

